Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processos Markovianos de saltos

Seja $\mathcal{S}$ um conjunto enumerável qualquer e $\mathbf{Q} = (q_{xy})_{x,y\in\mathcal{S}}$ uma Q-matriz, i.e., $\mathbf{Q}$ satisfaz $\forall\ x, y \in \mathcal{S}$

(i) $0 \leq q_x := -q_{xx} < \infty$;
(ii) $q_{xy} \geq 0$, se $x \neq y$;
(iii) $\sum_{z\in\mathcal{S}} q_{xz} = 0$.

Obs. $\sum_{z\in\mathcal{S},z\neq x} q_{xz} = q_x$

Para $x, y \in \mathcal{S}$, sejam

$$\pi_{xy} = \begin{cases} \frac{q_{xy}}{q_x}, & \text{se } q_x \neq 0 \text{ e } x \neq y; \\ 0, & \text{se } q_x = 0 \text{ e } x \neq y. \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_{xx} = \begin{cases} 0, & \text{se } q_x \neq 0; \\ 1, & \text{se } q_x = 0. \end{cases}$$

Então $\mathbf{\Pi} := \{\pi_{xy};\ x, y \in \mathcal{S}\}$ é uma matriz estocástica.

PMSs (cont)

Vamos a seguir construir um processo de saltos (X_t), definindo a cadeia de saltos e depois os tempos de salto.

1) Cadeia de saltos: $(Y_n) \sim \text{CM}(\mu, \mathbf{\Pi})$, onde μ é a distr de X_0.

2) Dada (Y_n), $T_1, T_2, \ldots$ são va's exponenciais indep com taxas $q_{Y_0}, q_{Y_1}, \ldots$, resp.

Construção de (X_t)

Sejam $\tau_0, \tau_1, \ldots$ va's iid Exp(1). Dada (Y_n), façamos

$$T_{n+1} = \tau_n / q_{Y_n}, \; n \geq 0$$

(conv: $\tau_n/0 = \infty$). Note que $T_n > 0 \; \forall \; n \geq 1$ qc.

Há 3 casos (como já vimos antes, mais genericamente).

1) Se $T_n < \infty \; \forall \; n \geq 1$ e $S_n = \sum_{i=1}^n T_i \to \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \; (S_0 = 0),$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

3 casos

2) Se $T_n = \infty$ para algum $n \geq 1$, seja $n^* = \min\{n \geq 1 : \; T_n = \infty\}$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n < n^* \; (S_{n^*} = \infty),$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

3) Se $T_n < \infty \; \forall \; n \geq 1$ e $S_n \to \zeta < \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$\begin{aligned} X_t &= Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \\ &= \infty, \text{ se } t \geq \zeta, \text{ onde} \end{aligned}$$

∞ é um ponto adicionado a $\mathcal{S}$, está bem definido para todo $t \geq 0$.

$(X_t)_{t \geq 0}$ assim definido é dito *processo Markoviano de saltos (mínimo)* associado a $\mathbf{Q}$. Not: $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$.

Def. Se $\mathbb{P}_x(S_n \to \zeta < \infty) > 0$ para algum $x \in \mathcal{S}$, diremos que $(X_t)/\mathbf{Q}$ é *explosivo/a*. Do contrário, diremos que é *não explosivo/a*.

Ex: o Processo de Nascimento do Teorema 1.i do Álbum 12 é explosivo.

Exemplos

1) Processo de Poisson de taxa $\lambda > 0$ em $\mathcal{S} = \mathbb{N}$:

$$q_{xy} = \lambda\, \delta_{x+1,y}, \; x \neq y \in \mathbb{N}.$$

2) Processo de Nascimento Puro em $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. Dados $q_x \geq 0$, $x \in \mathbb{N}$:

$$q_{xy} = q_x\, \delta_{x+1,y}, \; x \neq y \in \mathbb{N}.$$

2′) Processo de Nascimento Linear: $q_x = \lambda x$, $x \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$.

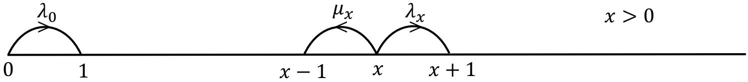
2″) Processo de Nascimento Linear com imigração:

$$q_x = \iota + \lambda x, \; x \in \mathbb{N}, \; \iota, \lambda > 0.$$

3) Processo de Nascimento e Morte em $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

Dados μ_x, $\lambda_x \geq 0$, $x \in \mathbb{N}$, com $\mu_0 = 0$:

$$q_{xy} = \mu_x\, \delta_{x-1,y} + \lambda_x\, \delta_{x+1,y}, \; x \neq y \in \mathbb{N}.$$



3′) Fila com 1 servidor: $\lambda_x \equiv \lambda$ (taxa de chegada de clientes), $\mu_x \equiv \mu$ (taxa de serviço)

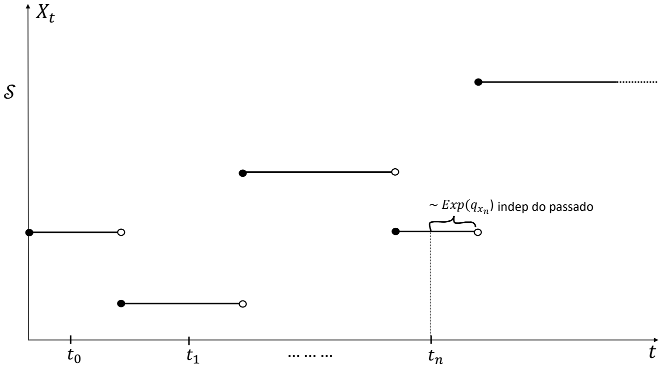
PMS — Propriedade de Markov

Teorema 1

Dados $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ e $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \,|\, X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}_{x_n}(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1}).$$

Dem. Segue da construção, usando a falta de memória da distribuição exponencial e a propriedade de Markov de (Y_n). $\square$



Construções equivalentes

1) $\{\tau_n^y;\ y \in \mathcal{S},\ n \geq 0\}$ iid Exp(1)

Dado que $Y_n = x$, então faça

$T_{n+1}^y = \tau_n^y / q_{xy},\ y \neq x;\quad T_{n+1} = \inf_{y \neq x} T_{n+1}^y;$

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } T_{n+1} = T_{n+1}^y; \\ x, & \text{se } T_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

2) Sejam (N_t^{xy}), $x, y \in \mathcal{S}$, PPs independentes com taxas q_{xy}, resp.

Dados Y_0 e $S_0 = 0$, façamos recursivamente

$S_{n+1} = \inf\{t > S_n :\ N_t^{Y_n,y} \neq N_{S_n}^{Y_n,y}$ para algum $y \neq Y_n\}$, e

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } S_{n+1} < \infty \text{ e } N_{S_{n+1}}^{Y_n,y} \neq N_{S_n}^{Y_n,y}; \\ Y_n, & \text{se } S_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

Obs. Os infs acima estão bem definidos pois $\sum_{y \neq x} q_{xy} = q_x < \infty$.